Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

12 de MAYO de 2014

TEMA: **42 B**

1	2		3		4		5	Nota Final
2 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 90 MINUTOS

Ejercicio n° 1

Resuelva en Complejos: $z^4 - 28 + 96\,j = 0 \quad \wedge \quad \mathrm{Re}(z^2) + |z|^2 - 18 = 0$

Ejercicio n° 2:

Dada $f(x) = x + 2$ si $x \in (0;1)$

a) Indique la expresión que debe tener f(x) en (-1;0) para que tenga simetría de media onda.

b) Considerando $f(x) = x + 2$ si $x \in (-1;1) \wedge f(x) = f(x+2)$, desarrolle en Serie Trigonométrica de Fourier.

Ejercicio n° 3:

Indique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) Si $f(t) = A\cos(\omega t + \pi/6)$ y $g(t) = A\cos(\omega t - \pi/6)$ entonces: $(f+g)(t) = A\cos(\omega t)$

b) $\int_0^{\infty} t^2 \cos(3t)\, e^{-t} = -0.052$ (justifique utilizando Transformada de Laplace)

Ejercicio n° 4:

a) Construya una función de transferencia G(s) con coeficientes reales, sabiendo que los únicos polos son $p_1 = -2 + j$, $p_2 = -2 - j$ y $p_3 = 1$ (simples), el único cero finito es $z = -4$ (simple) y $|G(-1+j)| = 3\sqrt{10}$

b) Halle la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = 5\,e^{-4t} - 1$

Ejercicio n° 5:

Resuelva aplicando Transformada Z:

$x(n+2) - 6\,x(n+1) + 9\,x(n) = 2^n$ con $x(0) = 1 \quad \wedge \quad x(1) = 8$

Firma del alumno: ....

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 42 B

Ejercicio 1:

28-96j = [100 ; 4.99]

Las 4 raíces son: w_0 = [$\sqrt{10}$; 1.249] = 1 + 3j , w_1 = [$\sqrt{10}$;2.8198] = -3 + j,
w_2 = [$\sqrt{10}$;4.39]= -1 – 3 j , w_3 = [$\sqrt{10}$;5.96]= 3 - j

2da parte: x= 3 $\vee$ x = -3

Las soluciones que cumplen ambas son w_1= -3 + j y w_3 = 3 – j

Ejercicio 2:

a) f(x) = -x – 3 en (-1;0)
b) $Sf(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\,\pi\,x)$

Ejercicio 3:

a) FALSO. La amplitud es mayor a A ya que forman un ángulo agudo (60º).

b) VERDADERO. $\mathscr{L}[\, t^2 \cos(3t)\,] = \frac{2s^3-54s}{(s^2+9)^3} \Rightarrow \int_0^{\infty} t^2 \cos(3t)\, e^{-t} = F(1) = \frac{-52}{1000} = -\,0.052$

Ejercicio 4:

a) $G(s) = \frac{15(s+4)}{(s-1)(s^2+4s+5)}$

b) $Y(s) = \frac{15(s+4)}{(s-1)(s^2+4s+5)} \bullet \frac{4(s-1)}{s(s+4)} = \frac{60}{s(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$

$$Y(s) = 12 \bullet \frac{A}{s} - 12 \bullet \frac{s}{s^2+4s+5} - 48 \bullet \frac{1}{s^2+4s+5}$$

$$Y(s) = 12 \bullet \frac{A}{s} - 12 \bullet \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} + (-48+24) \bullet \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$Y(t) = 12 - 12\cos(t)\, e^{-2t} - 24 \operatorname{sen}(t)\, e^{-2t}$$

Ejercicio 5:

$$X(z) = \frac{z^3-3z}{(z-3)^2(z-2)} \Rightarrow x(n) = 2 \bullet n \bullet 3^n + 2^n$$

2000
2200

tema 42B
12-5-14

EJ 1 Resuelva en complejos: $z^4 - 28 + 96j = 0 \wedge Re(z^2) + |z|^2 - 18 = 0$

- $z^4 = 28 - 96j = [100; 5]$

$w_k = \left[\sqrt{10}; \frac{5}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right]$

$w_k = \left[\sqrt{10}; \frac{5}{4} + \frac{\pi k}{2}\right]$

$w_0 = [\sqrt{10}; 1{,}25] = 1 + 3j$

$w_1 = [\sqrt{10}; 2{,}82] = -3 + j$

$w_2 = [\sqrt{10}; 4{,}39] = -1 - 3j$

$w_3 = [\sqrt{10}; 5{,}96] = 3 - j$

- $Re(z^2) = a^2 - b^2$

$|z|^2 = a^2 + b^2$

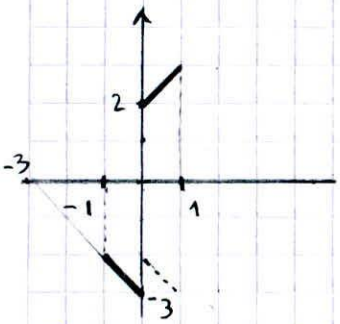
$\Rightarrow Re(z^2) + |z|^2 - 18 = a^2 \cancel{-b^2} + a^2 \cancel{+b^2} - 18 = 0 \longrightarrow a^2 = 9 \rightarrow |a| = 3$

$z = a + bj$

$\boxed{z_1 = -3 + j \quad ; \quad z_2 = 3 - j}$

EJ 2 Dada $f(x) = x + 2$ si $x \in (0,1)$

a) Indique la expresión que debe tener $f(x)$ en $(-1,0)$ para que tenga simetría de media onda.



$\boxed{f_{(x)} = -3 - x \quad \text{si } x \in (-1,0)}$ /

b) Considerando $f(x) = x + 2$ si $x \in (-1;1) \wedge f(x) = f(x+2)$ desarrolle la Serie trigonométrica de Fourier

$\boxed{\frac{a_0}{2} = 2}$

$\rightarrow a_n = 0$

$T = 2 \rightarrow L = 1 \rightarrow \omega = \pi$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}(t+2)\cos(n\pi t)\,dt =$

$= \int_{-1}^{1} t\cos(n\pi t)\,dt + 2\cos(n\pi t)\,dt =$

$= \frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} + \frac{t\,\text{sen}(n\pi t)}{n\pi t} + 2\frac{\text{Sen}(n\pi t)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - \overbrace{\cos(-n\pi)}^{\cos(n\pi)}\right) = \boxed{0 = a_n}$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}(t+2)\,\text{sen}(n\pi t)\,dt = \int_{-1}^{1} t\,\text{sen}(n\pi t) + 2\,\text{sen}(n\pi t)\,dt =$

$$= \frac{\overset{0}{\text{sen}(m\pi t)}}{m^2\pi^2} - \frac{t\cos(m\pi t)}{m\pi} - \frac{2\cos(m\pi t)}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{-\cos(m\pi) - \cancel{2\cos(m\pi)} - \overbrace{\cos(-m\pi)}^{\cos(m\pi)} + \cancel{2\overbrace{\cos(-m\pi)}^{\cos(m\pi)}}}{m\pi} = \frac{-2\overbrace{\cos(m\pi)}^{(-1)^m}}{m\pi} = b_n$$

$$\boxed{b_m = \frac{-2(-1)^m}{m\pi}}$$

$$\boxed{S(t) = 2 - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\,\text{sen}(m\pi t)}$$

EJ 3 Indique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) Si $f(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ y $g(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$ entonces $(f+g)(t) = A\cos(\omega t)$

$\boxed{F}$

$$\left.\begin{array}{l} F = [A; \frac{\pi}{6}] = A\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{A}{2}j \\ G = [A; -\frac{\pi}{6}] = A\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{A}{2}j \end{array}\right\} F+G = A\sqrt{3} \rightarrow F+G = [A\sqrt{3}; 0]$$

$$(f+g)(t) = A\sqrt{3}\cos(\omega t)$$

b) $\int_0^\infty t^2\cos(3t)e^{-t} = -0{,}052$ (Justifique utilizando transf. de Laplace)

$\boxed{V}$

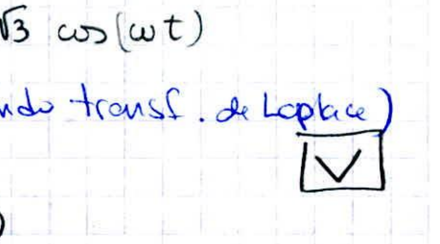
$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow$ hallo el valor de $F(1)$

$$f(t) = t^2\overbrace{\cos(3t)}^{g(t)} = t^2 g(t) \longrightarrow F(s) = (-1)^2 \cdot G''(s) = G''(s) \longrightarrow F(1) = G''(1) = -0{,}052$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+9} \rightarrow G'(s) = \frac{\overbrace{(s^2+9) - s\,2s}^{-s^2+9}}{(s^2+9)^2} \longrightarrow G''(s) = \frac{-2s(s^2+9)^2 - (-s^2+9)4s(s^2+9)}{(s^2+9)^4} = \frac{-520}{10^4}$$

EJ 4 a) Construye una función de transferencia $G(s)$ con coeficientes reales, sabiendo que los únicos polos son $p_1 = -2+j$; $p_2 = -2-j$ y $p_3 = 1$, simples, el único cero finito es $z = -4$ (simple) y $|G(-1+j)| = 3\sqrt{10}$

$$G(s) = \frac{k(s+4)}{(s-1)[(s+2)^2+1]} = \frac{k(s+4)}{(s-1)(s^2+4s+5)}$$



$$|G(-1+j)| = \frac{k\ a}{b.c.d} = \frac{k\sqrt{10}}{1.\sqrt{5}.\sqrt{5}} = 3\sqrt{10}$$

$$k = \frac{3\cancel{\sqrt{10}}\times 5}{\cancel{\sqrt{10}}} = 15$$

$$\rightarrow \boxed{G(s) = \frac{15(s+4)}{(s-1)(s^2+4s+5)}}$$

b) Halla la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = 5e^{-4t} - 1$

$$x(t) = 5e^{-4t} - 1 \rightarrow X(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s} = \frac{5s-s-4}{s(s+4)} = \boxed{\frac{4s-4}{s(s+4)} = X(s)}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{15\cancel{(s+4)}}{(s-1)(s^2+4s+5)} \cdot \frac{4s-4}{s\cancel{(s+4)}} = \frac{60s-60}{s(s-1)(s^2+4s+5)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$$\rightarrow A(s^3+3s^2+s-5) + B(s^3+4s^2+5s) + C(s^3-s^2) + D(s^2-s) = 60s-60$$

$$\begin{array}{lll}
s^3: & A+B+C & = 0 \\
s^2: & 3A+4B-C+D & = 0 \\
s: & A+5B-D & = 60 \\
\mathbb{1}: & -5A & = -60 \rightarrow \boxed{A=12}
\end{array}
\qquad
\left.\begin{array}{l}
B+C = -12 \\
4B-C+D = -36 \\
5B-D = 48
\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} B=0 \\ C=-12 \\ D=-48 \end{array}}$$

$$Y(s) = \frac{12}{s} - \frac{12s+48}{(s+2)^2+1} = \frac{12}{s} - \frac{\overbrace{12s+24}^{12(s+2)}}{(s+2)^2+1} - \frac{24}{(s+2)^2+1}$$

$$\boxed{y(t) = 12 - 12\, e^{-2t}\left(\cos(t) + 2\, \mathrm{sen}(t)\right)}$$

$\boxed{\text{EJ 5}}$ Resuelva aplicando transformada Z

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = 2^n \qquad \text{con } x(0)=1, \; x(1)=8$$

$$z^2\left[X(z) - \overset{1}{x(0)} - \frac{\overset{8}{\cancel{x(1)}}}{z}\right] - 6z\left[X(z) - \overset{1}{x(0)}\right] + 9X(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$z^2 X(z) - z^2 - 8z - 6zX(z) + 6z + 9X(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$X(z)\,(z^2-6z+9) = \frac{z}{z-2} + z^2 + 2z = \frac{z + z^3 - \cancel{2z^2} + \cancel{2z^2} - 4z}{z-2} = \frac{z^3-3z}{z-2} = \frac{z(z^2-3)}{z-2}$$

$$X(z) = z\left[\frac{z^2-3}{(z-2)(z^2-6z+9)}\right] = z\left[\frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-3)} + \frac{C}{(z-3)^2}\right]$$

$$\rightarrow A(z^2-6z+9) + B(z^2-5z+6) + C(z-2) = z^2-3$$

$$\left\{\begin{array}{l}
A+B = 1 \\
-6A-5B+C = 0 \\
9A+6B-2C = -3
\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=6 \end{array} \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{6z}{(z-3)^2} \rightarrow \boxed{x(n) = 2^n + 2 \times n\, 3^n}$$

NOTA